48

ECOLE POLYTECHNIQUE — **OPTION P'**

CONCOURS D'ADMISSION 1983

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Dans tout le problème, on note respectivement $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+^*$ les intervalles $[\,0, +\infty\,[$ et $]\,0, +\infty\,[$ de $\mathbb{R}$; E désigne l'ensemble des fonctions g à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies sur $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, indéfiniment dérivables par rapport à t et x en tout point $(t, x) \in \Omega$ et dont les dérivées partielles par rapport à x, ainsi que la fonction g elle-même identifiée à $\frac{\partial^0 g}{\partial x^0}$, vérifient l'hypothèse H suivante :

H : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout intervalle $[\,\xi, \eta\,] \subset \mathbb{R}_+^*$, il existe un couple (M, a) de réels strictement positifs (et dépendant éventuellement de g, n, ξ et η) tel que, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [\,\xi, \eta\,]$, $\left| \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(t, x) \right| \leqslant \frac{M}{a+t^2}$.

I

1 - Soient $g \in E$ et $[\,\xi, \eta\,]$ un intervalle non ponctuel de centre x_0 et inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

a. Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs M' et a' tels que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [\,\xi, \eta\,]$,

$$\left| g(t, x) - g(t, x_0) - (x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(t, x_0) \right| \leqslant (x - x_0)^2 \frac{M'}{a'+t^2}.$$

b. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ la convergence de l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} f(t) \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(t, x)\, dt .$$

c. On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, g(t, x)\, dt .$$

Établir que F est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer sa dérivée $n^{ème}$ par une intégrale impropre.

.../...

2 - Dans cette question, g désigne la fonction définie sur Ω par $g(t, x) = \frac{x}{t^2 + x^2}$.

a. Établir que g est indéfiniment dérivable par rapport à t et à x sur Ω et que

$$\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(t, x) = \frac{P_n(t, x)}{(t^2 + x^2)^{n+1}}$$

où P_n est un polynôme de degré $n + 1$ au plus par rapport au couple des variables t et x.

b. Établir pour tout intervalle $[\xi, \eta] \subset \mathbb{R}_+^*$ l'existence d'un polynôme Q_n de degré $n + 1$ au plus et d'une seule variable, à coefficients réels tous positifs ou nuls et tel que $|P_n(t, x)| \leqslant Q_n(t)$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [\xi, \eta]$. En déduire que g appartient à E.

c. La fonction f étant, comme dans I.1.*b*, à valeurs réelles, continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$, établir pour tout $x \in [0, +\infty[$ la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(tx)}{1 + t^2}\,dt$ et montrer que cette intégrale définit sur $\mathbb{R}_+$ une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

II

Dans cette partie, $g \in E$ est telle que $\frac{\partial g}{\partial t}(0, x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et vérifie en outre pour tout $(t, x) \in \Omega$ l'égalité

$$(1) \qquad \alpha x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) + \beta x \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) + \gamma g(t, x) = p(x) \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t, x)$$

où α, β, γ sont des constantes réelles et où p est une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et ne s'annulant pas dans $\mathbb{R}_+^*$.

1 - *a.* Pour x fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, établir l'existence de deux réels strictement positifs N et b tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t, x) \right| \leqslant \frac{N}{b + t^2}$$

b. En transformant convenablement la différence $g(t + 1, x) - g(t, x)$ établir, pour x fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, l'existence de deux réels strictement positifs N' et b' tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) \right| \leqslant \frac{N'}{b' + t^2}.$$

2 - Soit f une fonction à valeurs réelles définie, bornée et deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

a. Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} f(t) \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t, x)\,dt$, $\int_0^{+\infty} f(t) \frac{\partial g}{\partial t}(t, x)\,dt$, $\int_0^{+\infty} f'(t) \frac{\partial g}{\partial t}(t, x)\,dt$, $\int_0^{+\infty} f'(t)\, g(t, x)\,dt$.

.../...

b. Pour x fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, quelle liaison y a-t-il entre la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f''(t)\, g(t, x)\, dt$ et la convergence vers 0 de la fonction $t \mapsto f'(t)\, g(t, x)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

3 - On suppose que la fonction f envisagée dans la question II.2 est telle que $f'(0) = 0$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{t \to +\infty} f'(t)\, g(t, x) = 0$. En définissant la fonction F comme dans I.1.*c.*, établir pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ l'égalité

$$\alpha x^2 F''(x) + \beta x F'(x) + \gamma F(x) = p(x) \int_0^{+\infty} f''(t)\, g(t, x)\, dt .$$

En déduire que si f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f'' + kf = 0$ où k est un réel fixé, F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle & linéaire, homogène et du second ordre, qu'on écrira.

III

Dans cette partie, on choisit $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$ et $p(x) = -x^2$ de sorte que, avec les notations de II, l'égalité (1) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t, x) = 0 . \tag{2}$$

1 - On se propose de déterminer les fonctions $g \in E$ qui, à la fois, vérifient l'égalité (2) pour tout $(t, x) \in \Omega$, l'égalité $\frac{\partial g}{\partial t}(0, x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et qui, en tout point de Ω, sont de la forme $g(t, x) = \frac{1}{x} u\left(\frac{t}{x}\right)$, où u est une fonction à valeurs réelles définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

a. Montrer que, dans ces conditions, u est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre que l'on écrira, et dont on vérifiera que $\lambda \mapsto \frac{1}{1 + \lambda^2}$ est solution.

b. Intégrer cette équation différentielle et déterminer les fonctions g qui vérifient les conditions décrites au début de cette question III.1.

2 - Soit F la fonction définie pour tout x réel par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1 + t^2}\, dt .$$

a. Vérifier que F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle & de II.3 qu'on écrira en tenant compte des hypothèses de cette partie III.

b. Trouver la limite de $x F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et, en admettant que F est continue à l'origine, en déduire la valeur explicite de $F(x)$ pour tout x réel.

IV

Dans cette partie, on choisit $\alpha = \beta = p(x) = 1$ et $\gamma = 0$, de sorte que, avec les notations de II, l'égalité (1) s'écrit

$$x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) + x \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t, x) \quad . \tag{3}$$

1 - Soient ω un réel non nul et u une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

a. Montrer que les fonctions $(t, x) \mapsto u(x e^t)$ et $(t, x) \mapsto u(x e^{-t})$ vérifient (3) pour tout $(t, x) \in \Omega$. En déduire des fonctions g, appartenant ou non à E, et vérifiant à la fois (3) pour tout $(t, x) \in \Omega$ et l'égalité $\frac{\partial g}{\partial t}(0, x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$x^2 y'' + x y' + \omega^2 y = 0$$

(on pourra utiliser le changement de variable $z = \text{Log } x$).

c. On suppose que la fonction $(t, x) \mapsto u(x e^t) + u(x e^{-t})$ appartient à E et on considère la fonction F_1 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$F_1(x) = \int_0^{+\infty} [u(x e^t) + u(x e^{-t})] \cos \omega t \, dt \, .$$

Montrer que F_1 s'exprime par une combinaison linéaire de deux fonctions composées de fonctions élémentaires

d. Vérifier que les hypothèses de IV.1.*c.* sont satisfaites par le choix pour u de la fonction $\lambda \mapsto \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$ et en déduire l'existence d'un réel K tel que, pour tout $x > 0$ et différent de 1,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{(x + e^t)(x + e^{-t})} dt = K \frac{\sin(\omega \text{ Log } x)}{x^2 - 1} \quad .$$

Calculer en fonction de K et ω l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{(1 + e^t)(1 + e^{-t})} dt$.

2 - Dans cette dernière question, on suppose seulement que u est une fonction à valeurs réelles continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que les deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{u(\lambda)}{\lambda} \cos(\omega \text{ Log } \lambda) \, d\lambda \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{u(\lambda)}{\lambda} \sin(\omega \text{ Log } \lambda) \, d\lambda$$

soient convergentes, et on définit F_1 par la même égalité que dans IV.1.*c.* Montrer que l'expression de F_1 obtenue dans IV.1.*c.* demeure valable, et donner sous forme d'intégrales qu'on ne cherchera pas à calculer les coefficients de la forme linéaire qui exprime F_1.

♦
♦ ♦